Wettbewerb Euler im Tram, Aufgabe 6

29. August 2007

1 Problemstellung

In wie viele Stücke kann man einen Würfel mit vier ebenen Schnitten höchstens zerlegen?
Und wie viele Ebenen braucht es, um einen Würfel in 300 Stücke zu zerschneiden?

2 Antwort

Vier Ebenen zerlegen einen Würfel in höchstens 15 Stücke.
Um 300 Stücke zu bekommen, braucht es 13 Ebenen.

3 Vorbemerkungen

Vergessen wir zunächst den Würfel und fragen: In wie viele Stücke kann man mit 1, 2, 3, ... n Ebenen den ganzen dreidimensionalen Raum höchstens zerlegen? (Wie man zur ursprünglichen Fragestellung zurückkehrt, wird am Schluss dieser Lösung erläutert.)

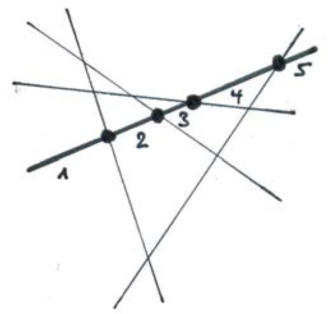
Dann bemerken wir: Jedesmal, wenn zwei der verwendeten Ebenen parallel sind, drei von ihnen sich in parallelen Geraden schneiden oder vier von ihnen durch einen Punkt gehen, "verliert" man Schnittgeraden, Schnittpunkte und damit Teilstücke. Die maximale Anzahl von Stücken, nach der gefragt ist, bekommt man also, wenn jede Ebene alle andern schneidet, wenn zwei Schnittgeraden in derselben Ebene sich immer schneiden und wenn alle diese Schnittpunkte verschieden sind, also jeder Punkt auf höchstens drei Ebenen liegt.

[Die Mathematiker sprechen dann von Ebenen "in allgemeiner Lage"; und weil von den unendlich vielen Ebenen, die man auswählen könnte, immer nur endlich viele zu den schon vorhandenen parallel sind, parallele Schnittgeraden oder mehrfache Schnittpunkte ergeben, ist es immer möglich, eine zusätzliche Ebene so auszuwählen, dass sie diese Bedingung erfüllt.]

Nun nehmen wir mal an, eine Anzahl n von Ebenen ("in allgemeiner Lage") sei schon bestimmt, und nehmen eine neue, n+1-te Ebene dazu. Dann entsteht in dieser neuen Ebene ein Muster von Geraden, wo sie sich mit den n ursprünglichen Ebenen schneidet, und von Flächenstücken dazwischen. Die entscheidende Beobachtung ist nun: **Jedes solche Flächenstück bedeutet ein Stück des Raumes (oder des Würfels), das durch unsere neue Ebene zerschnitten wird**. Um zu wissen, wie viele neue Teile dazukommen, müssen wir also bloss diese Flächenstücke zählen.

4 Das ebene Problem

Damit hat sich ein neues, aber viel einfacheres Problem ergeben: In wie viele Flächenstücke können 1, 2, 3, ... m Geraden eine Ebene höchstens zerlegen? Die einfachsten Fälle sind offensichtlich: eine Gerade zerlegt die Ebene in zwei Stücke, zwei Geraden, die sich schneiden, in vier Stücke.



Stellen wir uns für einen Augenblick vor, wir wissen die Antwort für vier Geraden bereits und nehmen jetzt eine zusätzliche, fünfte Gerade dazu (wie in der Skizze). Wenn die zu den bisherigen vier nicht parallel ist, schneidet sie sie alle: wir bekommen 4 Schnittpunkte, also 5 Stücke auf der neuen Geraden (in der Skizze numeriert). Jedes dieser Stücke zerlegt eine Fläche in zwei Teile: wir haben also 5 neue, zusätzliche Flächenstücke bekommen.

Allgemein geht das genau gleich: Wenn wir die Antwort für m Geraden bereits wissen, nehmen wir eine zusätzliche, m+1-te Gerade dazu; diese schneidet die “alten” in m Schnittpunkten, produziert also m+1 neue Flächenstücke. Ich fasse das in einer kleinen Tabelle zusammen:

Anzahl Geraden	1	2	3	4	5	6	...
Anzahl “neue” Flächenstücke		2	3	4	5	6	...
Anzahl Flächenstücke insgesamt	2	4	7	11	16	22	...

[Mit einem Trick, den man “vollständige Induktion” nennt – übrigens eine Basler Erfindung: er geht auf Jacob Bernoulli (1654-1705) zurück – können die Mathematiker das in einer Formel ausdrücken: für m Geraden bekommt man 1/2 ($m^2 + m + 2$) Flächenstücke.]

5 Das räumliche Problem

Mit dieser Erkenntnis kehren wir nun zu unserem ursprünglichen Problem im Raum zurück. Die Beobachtung am Ende von Abschnitt 3 sagt uns ja: Wenn wir wissen, in wie viele Stücke n Ebenen den Raum zerschneiden und jetzt eine neue, n+1-te Ebene dazu nehmen, bekommen wir so viele zusätzliche Stücke, wie es in der neuen Ebene Flächenstücke hat. Aber wie viele das maximal sein können, können wir in der Tabelle von Abschnitt 4 ablesen!

Wir bekommen so die folgende Tabelle, die unser ursprüngliches Problem löst:

Anzahl Ebenen	1	2	3	4	5	6	...
Anzahl “neue” Raumstücke		2	4	7	11	16	...
Anzahl Raumstücke insgesamt	2	4	8	15	26	42	...

[Auch hier gibt die “vollständige Induktion” eine Formel: für n Ebenen “in allgemeiner Lage” bekommt man 1/6 ($n^3 + 5n + 6$) Stücke.]

Die erste Antwort lässt sich nun einfach ablesen: 4 Ebenen zerlegen den Raum in höchstens 15 Stücke.

Für die zweite Frage müssen wir noch ein wenig weiter rechnen (oder die obige Formel verwenden):

Ebenen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
“neue” Raumstücke		2	4	7	11	16	22	29	37	46	56	67	79	...
Raumstücke insgesamt	2	4	8	15	26	42	64	93	130	176	232	299	378	...

Nun kann man ablesen, dass 12 Ebenen den Raum in maximal 299 Stücke zerlegen; für 300 Stücke braucht man deshalb einen dreizehnten Schnitt!

6 Schlussbemerkungen

Aber halt – wir hatten ja nicht nach der Zerlegung des ganzen dreidimensionalen Raums, sondern nach der eines begrenzten Würfels gefragt! Nun, das spielt keine grosse Rolle: Die endlich vielen Schnittpunkte unserer ersten zwölf Ebenen liegen alle in einem begrenzten Bereich; indem man (wenn nötig) die ganze Konfiguration verkleinert, kann man erreichen, dass sie alle im Innern des Würfels zu liegen kommen. Und um genau die verlangten 300 Stücke (und nicht mehr) zu erhalten, kann man die dreizehnte Ebene so wählen, dass sie bloss eine Ecke des Würfels abschneidet und die andern Ebenen erst ausserhalb des Würfels trifft.

Damit ist die Richtigkeit der Antwort, die oben gegeben wurde, nachgewiesen.